

Telematiese Skoleprojek



2022 VAKWERKBOEK Graad 11

$f(x)=x^2$ **WISKUNDE**

'n Gesamentlike inisiatief tussen die Wes-Kaapse Onderwysdepartement en die Universiteit Stellenbosch.



**Western Cape
Government**
Education



Stellenbosch
UNIVERSITY
IYUNIVESITHI
UNIVERSITEIT

forward together
sonke siya phambili
saam vorentoe

UITSAAI-SESSIES

GRAAD 11

Funksies

Sessie	Datum	Tyd	Onderwerp
1	13/10/2022	15h00-16h00	Parabola & line
2	17/10/2022	15h00-16h00	Parabool en Reguitlyn
3	02/11/2022	15h00-16h00	Hyperbola and Exponential
4	03/11/2022	15h00-16h00	Hiperbool en Eksponensiële

INLEIDING

Beste Graad 11- Leerder

In 2022 sal daar 4 Telematiese sessie wees, vir graad 11 leerders. Twee sessies sal in Afrikaans wees en twee sessies sal in Engels wees. Hierdie werkboek bied jou die materiaal vir hierdie sessies. Maak seker dat jy hierdie werkboek elke keer na die “Telematiese” sessie saam bring.

Die eerste sessie sal oor die Parabool en Reguitlyn wees, en die tweede sessie oor Hiperbool en Eksponensiële funksie.

Neem asseblief kennis dat al hierdie graad 11 funksies belangrik is en ook in graad 12 gevra sal word. Hierdie inhoud is ongeveer 25 punte van jou graad 12 Wiskunde Vraestel 1. So ek versoek jou om jou beste te gee om hierdie funksies te verstaan, want jy berei ook indirek vir die graad 12-eksamen voor.

Stuur 'n e-pos na school@sun.ac.za met jou naam, van, e-posadres en skoolnaam om te registreer. 'n Gebruikersnaam en wagwoord sal na jou gestuur word. Jy sal dan toegang tot alle voorheen opgetekende Telematiese sessies en -materiaal oor ander onderwerpe verkry vanaf die webwerf, “Telematic Schools Project”, <https://schools.sun.ac.za/> . Toegang tot hierdie opnames vanaf hierdie webwerf, is nul-gegradeerd (“zero-rated”).

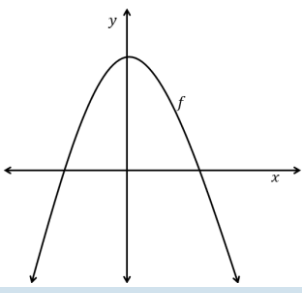
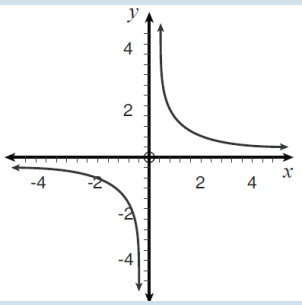
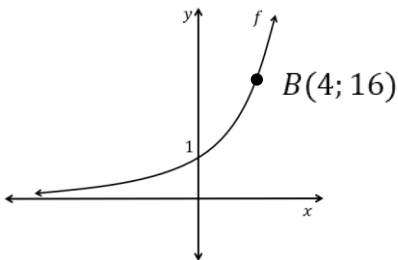
Jy word aangemoedig om voorbereid te kom. Bring 'n pen en genoeg papier (die ideaal is 'n harde-omslagoefeningboek) en jou wetenskaplike sakrekenaar saam.

Jy word aangemoedig om ten volle deel te neem aan elke les deur vrae te vra en die oefeninge uit te werk en waar versoek word, jou vrae na die studio te sms of te e-pos.

Onthou: “Sukses val nie in jou skoot nie, dit is die gevolg van gereelde en konstante harde werk.”

STERKTE. Mag jy die sukses behaal wat jy verdien!

TERMINOLOGIE

Term	Definisie
funksie	
parabool	
hiperbool	
eksponent	
Toenemende funksie	'n Funksie wat 'opwaarts' beweeg wanneer jy daarna kyk van links na regs. As 'n funksie 'n draaipunt het, is dit die punt waar die funksie verander vanaf 'n toenemende funksie na 'n dalende funksie.
Dalende funksie	'n Funksie wat 'afwaarts' beweeg wanneer jy daarna kyk van links na regs. As 'n funksie 'n draaipunt het, is dit die punt waar die funksie verander vanaf 'n dalende na 'n toenemende funksie.

TERMINOLOGIE

Term	Definisie
Horisontale skuif	'n Translasie van die grafiek van links of regs
Vertikale skuif	'n Translasie van die grafiek van opwaarts of afwaarts
Gemiddelde gradiënt	Die gradiënt tussen twee punte op die grafiek. (grafieke met kurwes)
Definisieversameling/ gebied	Al die moontlike x -waardes van die funksie/grafiek. (Om die definisieversameling/gebied te bepaal, kyk na die grafiek van links na regs.)
Waardeversameling/terrein	Al die moontlike y -waardes van die funksie/grafiek. (Om die waardeversameling /terrein te bepaal, kyk na die grafiek van bo na onder.)
x -afsnit	Waar die funksie die x -as kruis. (sny)
y -afsnit	Waar die funksie die y -as kruis. (sny)
Simmetrie - as	'n Lyn wat die funksie presies in die helfte sny. (verdeel) Die parabool het 'n vertikale lyn van simmetrie ($x = \dots$) en die hiperbool het 2 asse van simmetrie (wat mekaar kruis $\rightarrow X$. Hulle is in die vorm $y = mx + c$) Die eksponent grafiek het geen as van simmetrie nie.
Asimptoot	'n Reguitlyn wat die kromme van die grafiek nader, maar dit nooit raak of kruis nie.
Draaipunt	
Maksimum	Slegs te kry by funksies wat 'n draaipunt het. Die maksimum is die hoogste waarde wat 'n grafiek kan hê en is altyd die y -waarde van die draaipunt.
Minimum	Slegs te kry by funksies wat 'n draaipunt het. Die minimum is die laagste waarde wat 'n grafiek kan hê en is altyd die y -waarde van die draaipunt.

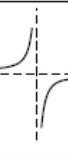
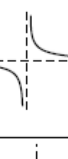
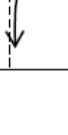
LET WEL

EIENSKAPPE VERWANT AAN ALLE FUNKSIES

x afsnit: punt op die x -as waar $y = 0$ (los op vir x as $y = 0$) y -afsnit: punt op die y -as waar $x = 0$ (vervang $x = 0$)
 Gebied/ definisieversameling: die versameling van alle x -waardes wat die funksie waar maak (gewoonlik $x \in \mathbb{R}$, tensy daar 'n vertikale asimptoot is)
 Terrein/ waardeversameling: die versameling van alle y -waardes wat die funksie waar maak.

TRANSFORMASIES IN FUNKSIES

$g(x) = f(-x)$	Refleksie van f om die y -as
$g(x) = -f(x)$	Refleksie van f om die x -as
$g(x) = f(x) + q$	Translasie van f , q eenhede opwaarts of afwaarts
$g(x) = f(x + p)$	Translasie van f , p eenhede na links of regs
$g(x) = f(ax)$	Verander die steilte in 'n grafiek (nie-trigonometries)

Vergelyking	Reguitlyn $y = ax + q$	Parabool $y = ax^2 + bx + c$ of $y = a(x + p)^2 + q$	Hiperbool $y = \frac{a}{x + p} + q$	Eksponeensiël $y = ab^x + q$
Vorm	$a > 0$  $a < 0$  $a = 0$ $\therefore y = q$  a ongedefinieerd $\therefore x = \dots$ 	$a > 0$  $(-p; q)$ $a < 0$  $(-p; q)$	$a > 0$  $a < 0$ 	$a > 0; b > 1$  $a > 0; 0 < b < 1$  $a < 0; b > 1$  $a < 0; 0 < b < 1$ 
Gebied	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} - \{p\}$	$x \in \mathbb{R}$
Terrein	$y \in \mathbb{R}$	$y \in [q; \infty)$ or $y \in (-\infty; q]$	$y \in \mathbb{R} - \{q\}$	$y \in (-\infty; q)$
Ander belangrike punte	$a = \text{gradient} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ q : y -waarde van die y -afsnit	Draaipunt $(-p; q)$ Om draaipunt te bereken as $y = ax^2 + bx + c$ Vir die x -waarde van draaipunt $x = -\frac{b}{2a}$ of $\frac{dy}{dx} = 0$ Vir y -waarde van draaipunt: vervang die berekende x -waarde in die vergelyking	Asimptote: $y = q$ $x = -p$ $y = (x + p) + q$ $= -[(x + p) + q]$	Asimptoot: $y = q$

SESSIE 1: PARABOOI EN REGUITLYN



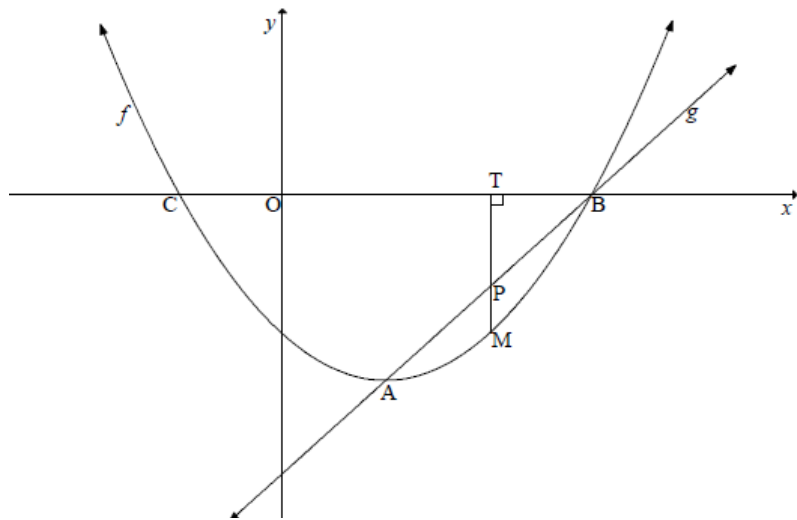
OPSOMMING

WAT U MOET WEET

- Al die terminologie op bladsy 4 en 5.
- Weet wat die simmetriese-as is.
- Produk van twee faktore .
- Verstaan die draaipunt.
- Hoe om die vergelyking van die reguitlyn te bepaal.

VRAAG 1

Die grafiek van $f(x) = x^2 + bx + c$ en die reguitlyn g is hieronder geskets. A en B is die snypunte van f en g . A is die draaipunt van f . Die grafiek van f sny die x -as by B(3 ; 0) en C. Die simmetriese-as van f is $x = 1$.



- 1.1 Skryf die koördinate van C neer.
- 1.2 Bepaal die vergelyking van f in die vorm $y = ax^2 + bx + c$.
- 1.3 Bepaal die vergelyking van g in die vorm $y = mx + c$.
- 1.4 Bereken die koördinate van die draaipunt van f .
- 1.5 Bepaal die waardeversameling van f .
- 1.6 Vir watter waarde (s) van x is f toenemend ?
- 1.7 Vir watter waarde(s) van h sal $f(x) = h$, twee positiewe wortels hê.
- 1.8 As $k(x) = f(x + 1) - 2$, bepaal die vergelyking van k , in die vorm,
 $k(x) = a(x + p)^2 + q$.
- 1.9 Vir watter waarde(s) van x sal : $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$
- 1.10 Bepaal die waarde(s) van x , waarvoor $\frac{4}{f(x)}$ 'n maksimum sal wees.

SESSIE 1: PARABOOL EN REGUITLYN



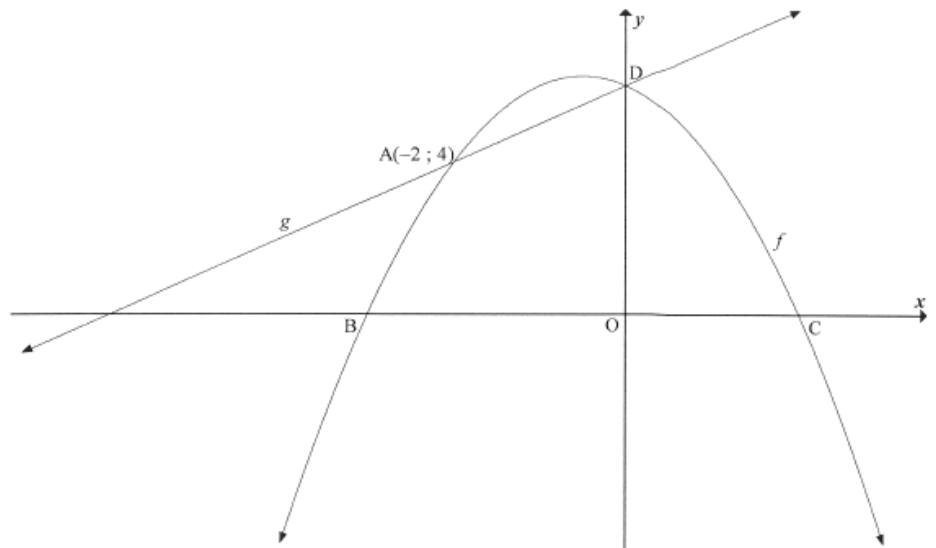
Opsomming

WAT U MOET WEET

- Al die terminologie op bladsy 4 en 5.
- Hoe om 'n kwadratiese vergelyking te faktoriseer.
- Formule vir die gemiddelde gradient tussen twee punte.
- Hoe om die vergelyking van die reguitlyn te bepaal.

Vraag 2

In die diagram is die grafieke van $f(x) = -x^2 - x + 6$ en $g(x) = mx + c$. $A(-2; 4)$ is die snypunt van die twee grafieke.



- 2.1 Bepaal die x - afsnitte van f .
- 2.2 Bereken die vergelyking van die simmetrie -as van f .
- 2.3 Bepaal die waardeversameling van f .
- 2.4 Bereken die gemiddelde gradient tussen punt A en D.
- 2.5 Skryf die vergelyking van g , in die vorm $g(x) = mx + c$ neer.
- 2.6 Bepaal die vergelyking van h as h die refleksie is van f in die x - as en word daarna vir 3 eenhede na regs getransleer. Los die antwoord in die vorm $h(x) = a(x + p)^2 + q$.
- 2.7 Vir waarde(s) van x sal $x \cdot f(x) < 0$.
- 2.8 As $f(p) = f(r) = 4$, bepaal die waarde van $p - r$ as $r < 0$.

SESSION 1: PARABOLA AND STRAIGHT LINE



OPSOMMING

WAT U MOET WEET

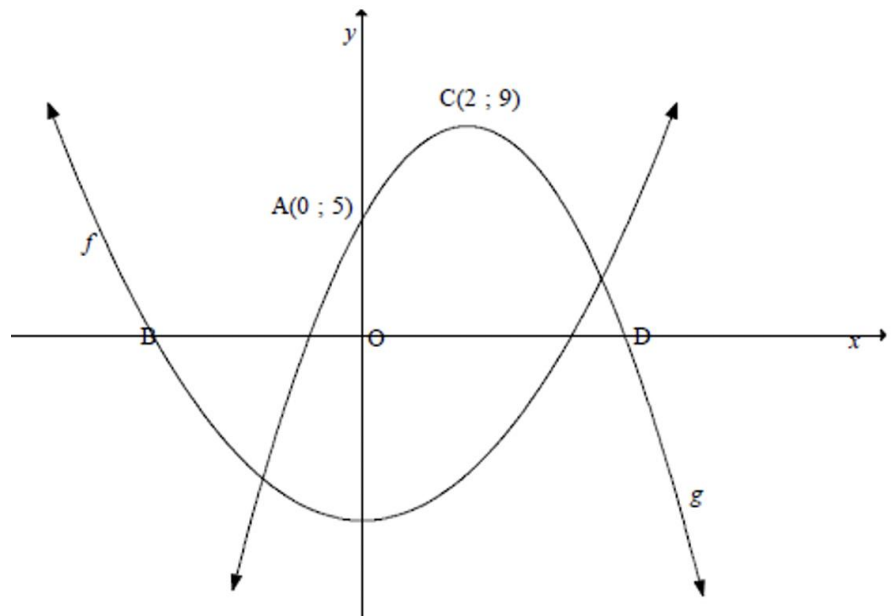
- Al die terminologie op bladsy 4 en 5.
- Hoe om 'n kwadratiese vergelyking te faktoriseer.
- Formule vir die gemiddelde gradient tussen twee punte.
- Draaipunt vergelyking van die parabool.

VRAAG 3

Die skets hieronder verteenwoordig die grafieke van die twee parabole, f en g .

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$$

Die draaipunt van g is $C(2; 9)$ en die y -afsnit van g is $A(0; 5)$. B en D is die x -afsnitte van f en g respektiewelik.



3.1 Toon aan dat $g(x) = -x^2 + 4x + 5$.

3.2 Bereken die gemiddelde gradient van g tussen die punte A en C.

3.3 Bereken die lengte van BD.

3.4 Gebruik die grafieke om vir x op te los, as:

3.4.1 $f(x) \geq 0$

3.4.2 f en g albei streng stygend is.

VRAAG 4

Gegee : $f(x) = 2x^2 + x + 6$

4.1 Bepaal die koördinate van die draaipunt van f .

4.2 Bereken die y -afsnit van f .

4.3 Bereken die x -afsnit van f .

4.4 Skets die grafiek van f , toon duidelik die afsnitte met die asse asook die koördinate van die draaipunt aan.

4.5 Bepaal die waardes van k waarvoor $f(x) = k$ gelyke wortels sal hê.

4.6 As die grafiek van f met twee eenhede na regs en een eenheid opwaarts getransleer word om vir h te vorm, bepaal die vergelyking van h in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

SESSIE 2: HIPERBOOL & EKSPONENT GRAFIEK



OPSOMMING

WAT U MOET WEET

- Al die terminologie op bladsy 4 en 5.
- Hoe om die asymptote van 'n hiperbool te bepaal.
- Hoe om die x- en y-afsnitte van 'n funksie te bepaal.
- Vorm van die hiperbool.
- Los op van lineêre vergelykings.
- Vorm van die eksponent grafiek.
- Formule vir die gemiddelde gradient.

VRAAG 5

Gegee: $f(x) = \frac{8}{x-2} + 3$

- 5.1 Skryf die vergelykings van die asimptote van f neer.
- 5.2 Bepaal die x- en y-afsnitte van f .
- 5.3 Gee die definisieversameling van f .
- 5.4 Skets die grafiek van f . Toon duidelik alle afsnitte met die asse sowel as die asimptote aan.
- 5.5 As $y = x + k$, 'n vergelyking van die simmetrie-as van f is, bereken die waarde van k .
- 5.6 Die grafiek van f word getransleer om, $m(x) = \frac{-8}{x+1} + 3$ te kry. Beskryf die transformasie.

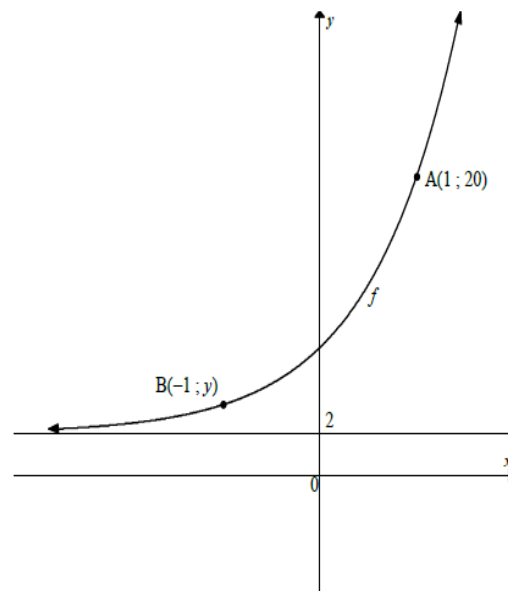
VRAAG 6



- 6.1 Toon aan dat die vergelyking van f is,

$$f(x) = 2(3)^{x+1} + 2$$

- 6.2 Bepaal die y-koördinaat van punt B.
- 6.3 Bereken die gemiddelde gradiënt van die kurwe tussen die punte A en B.
- 6.4 'n Nuwe vergelyking h word verkry as f in die asimptoot gereflekteer word.
- 6.4.1 Bepaal die vergelyking van h .
 - 6.4.2 Skryf die waardeversameling van h neer.



SESSIE 2: HIPERBOOL & EKSPONENT GRAFIEK



OPSOMMING

WAT U MOET WEET

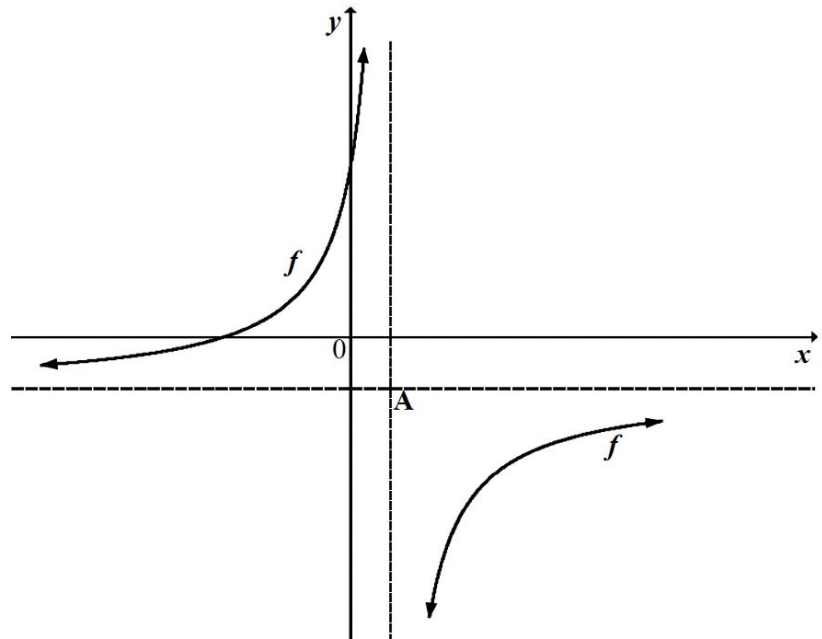
- Al die terminologie op bladsy 4 en 5.
- Hoe om die twee asimptote van 'n hiperbool te bepaal.
- Dat al die punte op die x - as 'n y -waarde van 0 het.
- Vorm van die hiperbool.
- Hoe om lineêre en eksponensieële vergelykings op te los.
- Vorm van die eksponent grafiek.
- Weet hoe om die verskillende kwadrante in die kartetiese vlak, te benoem.

VRAAG 7

Die skets hieronder is die grafiek van

$$f(x) = \frac{-9}{x-1} - 2.$$

A is die snypunt van die asymptote van f .



- 7.1 Skryf die koördinate van A neer.
 - 7.2 Bepaal die koördinate van die x -afsnit van f .
 - 7.3 Gee die vergelyking van die simmetriese – as van f wat 'n negatiewe gradiënt het.
 - 7.4 Vervolgens, bepaal die koördinate van die punt wat op f in die vierde kwadrant sal lê, wat die naaste aan punt A sal wees.
 - 7.5 Die grafiek van f word in die x - as gereflekteer om die grafiek van g te verkry. Skryf die grafiek van g in die vorm $y = \dots \dots \dots$
-
8. Gegee : $h(x) = 4(2^{-x}) + 1$
 - 8.1 Bepaal die koördinate van die y -afsnit van h .
 - 8.2 Verduidelik waarom h geen x – afsnitte sal hê nie.
 - 8.3 Teken die grafiek van h , toon duidelik aan alle afsnitte met die asse, asook alle asimptote en ten minste een ander punt wat op die grafiek van h sal wees .
 - 8.4 Beskryf die transformasie van h na g as $g(x) = 4(2^{-x} + 2)$.

SESSIE 2: HIPERBOOL



OPSOMMING

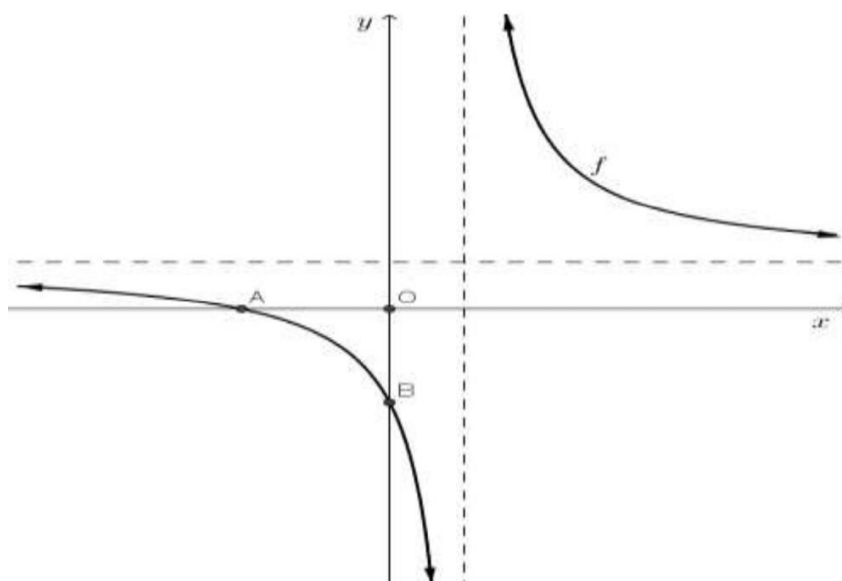
WAT U MOET WEET

- Al die terminologie op bladsy 4 en 5.
- Die formule vir die area/oppervlakte van 'n driehoek.
- Alle punte op die x -as se y -koördinaat is 0.

VRAAG 9

Gegee die skets van:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$



- 9.1 Skryf die vergelyking van die vertikale asimptoot van f neer.
- 9.2 Bepaal die koördinate van A.
- 9.3 Bepaal die area/ oppervlakte van $\triangle AOB$.
- 9.4 Toon aan dat $f(x)$ kan geskryf word as $f(x) = \frac{3}{x-1} + 1$
- 9.5 Die grafiek van f word so geskuif dat punt A op die oorsprong is. Wat is die koördinate van die snypunt van die asimptote van die nuwe grafiek?