Wes-Kaapse Regering

Onderwys

Wes-Kaap Onderwys Departement

TELEMATIESE

LEERMATERIAAL 2016

Graad 12

Wiskunde

Beste Graad 12-Leerder

In 2016 sal daar 6 Telematiese Wiskunde sessies wees, 2 per kwartaal. Die werkboek voorsien die aktiwiteite vir die sessies. Maak seker dat jy hierdie werkboek elke keer na elke "Telematics" sessie saambring.

In Kwartaal een sal die aanbieders Funksies, Inverse funksies en die Log-grafiek as inverse van die Eksponensiële grafiek hersien. Maak asseblief seker dat jy die grafieke wat in graad 11 gedoen was, hersien vóór die aanvang van hierdie sessies. Tydens die graad 12-eksamens sal hierdie afdeling van die grafieke $\pm$ 35 van die 150 punte van Vraestel 1, tel.

In Kwartaal 2 word Trigonometrie hersien met die fokus op Saamgestelde en Dubbelhoeke. Maak seker dat jy vóór die sessie die graad 11-Trigonometrie hersien. Differensiaalrekening met spesifieke fokus op die grafiek van die derdegraadse polinoom sal tydens die 4de Telematiese -sessie bespreek word.

Die lesse in Kwartaal 3 sal fokus op hersiening van graad 11- en 12-Meetkunde. Die graad 11- Meetkunde behels die sirkelmeetkunde stellings met hoeke in 'n sirkel, koordevierhoeke en raaklyne. Die graad 12-Meetkunde is gebaseer op Verhouding en Eweredigheid, asook Gelykvormige driehoeke. Graad 11-Meetkunde is veral belangrik ten einde die Graad 12-Meetkunde te kan doen; dus moet hierdie afdeling van die werk baie goed verstaan word en gereeld ingeoefen word om die nodige vaardighede te bemeester.

Jou onderwyser moet vir jou 'n presiese aanduiding kan gee van watter stellings jy moet studeer vir eksamendoeleindes. Daar is altesaam 6 bewyse van stellings wat jy moet ken, omdat dit geëksamineer kan word. Hierdie stellings is ook gemerk met (**) in die Telematiese werkboek; 4 van die stellings is graad 11-stellings en 2 is graad 12-stellings.

Aan die begin van elke les, sal die aanbieder jou voorsien van 'n opsomming van die belangrikste konsepte en hy of sy sal saam met jou deur die aktiwiteite werk. Jy word aangemoedig om voorbereid te kom. Bring 'n pen en genoeg papier (die ideaal is 'n harde- omslagoefeningboek) en jou wetenskaplike sakrekenaar saam.

Jy word ook aangemoedig om ten volle deel te neem aan elke les deur vrae te vra en die oefeninge uit te werk en, waar jy versoek word, jou antwoorde na die studio te sms of te e-pos.

Onthou: "Sukses is nie 'n gebeurtenis nie, dit is die gevolg van gereelde en volgehoue harde werk".

STERKTE. Wens jou al die sukses toe wat jy verdien!

Kwartaal 1: Februarie en Maart (Graad 12)				
Dag	**Datum**	**Tyd**	**Vak**	**Onderwerp**
Woensdag	10 Februarie	15:00 – 16:00	Wiskunde	Funksies & Inverse Funksies
Dinsdag	8 Maart	15:00 – 16:00	Wiskunde	Die log- en eksponesiale funksies as inverses van mekaar

Kwartaal 2: April en Mei (Graad 12)				
Dag	**Datum**	**Tyd**	**Vak**	**Onderwerp**
Woensdag	13 April	15:00 – 16:00	Wiskunde	Trigonometrie
Woensdag	18 Mei	15:00 – 16:00	Wiskunde	Differensiaalrekene

Kwartaal 3: Julie, Augustus en September (Graad 12)				
Dag	**Datum**	**Tyd**	**Vak**	**Onderwerp**
Dinsdag	16 Augustus	15:00 – 16:00	Wiskunde	Meetkunde
Woensdag	24 Augustus	15:00 – 16:00	Wiskunde	Meetkunde

Sessie 1: Die Begrip van 'n inverse; die inverses van $y = mx + c$ en $y = ax^2$

Die inverse funksie is 'n funksie wat die "teenoorgestelde effek" het van 'n gegewe funksie. Meer formeel, definieer ons die inverse as volg: Indien f 'n funksie is met definisie versameling X, dan is f^{-1} die inverse funksie as en slegs as $f^{-1}(f(x)) = x$, vir elke $x \in X$.

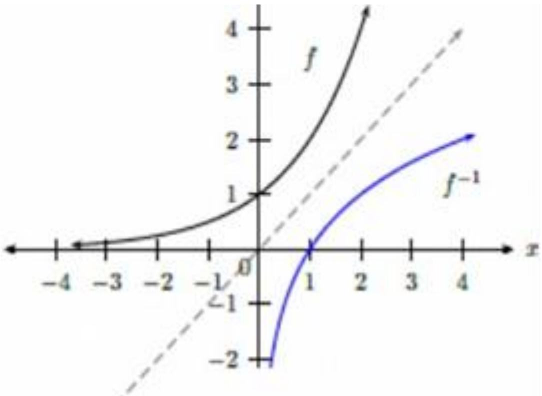
'n Funksie moet 'n "een tot een-duidige relasie" wees ten einde te verseker dat sy inverse ook 'n funksie is. Indien 'n funksie f 'n inverse funksie f^{-1} het, is die funksie omkeerbaar.

Gegewe 'n funksie $f(x)$, bepaal ons die inverse $f^{-1}(x)$ as volg:

- Ruil x en y om in die vergelyking;
- Maak y dan die onderwerp van die vergelyking;
- Druk nou die nuwe vergelyking in funksienotasie uit.

LW:
Indien die inverse van 'n funksie nie 'n funksie is nie, mag ons nie die inverse in funksienotasie skryf nie.
Bv. Die inverse van $f(x) = 3x^2$ mag ons nie skryf as $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$ nie, want dit is nie 'n funksie nie.

Ons laat dit in die vergelyking vorm $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$. Ons kan dus hieruit aflei dat $f(x) = 3x^2$ 'n nie-omkeerbare funksie is. Uit die grafiese voorstellings van die funksies f en sy inverse f^{-1} is dit duidelik dat die twee grafieke simmetries is met betrekking tot die lyn $y = x$. M.a.w die een is die refleksie van die ander in die lyn $y = x$. Hieronder is 'n voorbeeld ter illustrasie.



> **LW:** in die notasie vir die inverse funksie f^{-1} kan ons nie -1 as 'n eksponent beskou nie. Dit is slegs die skryfwyse vir die inverse funksie. Ons moet die verskil tussen hierdie funksionele notasie en eksponente kan onderskei: bv $(\frac{1}{2})^{-1}$ of $3 + x^{-1}$ het 'n verskillende betekenis as f^{-1}

Ons moet ook die inverse van 'n funksie onderskei van die omgekeerde (resiprook) van 'n funksie.

Let op die volgende onderskeidings:

Inverse	Omgekeerde
$f^{-1}(x)$	$\lvert f(x)\rvert^{-1} = \frac{1}{f(x)}$
$f(x)$ en $f^{-1}(x)$ is simmetries m.b.t $y = x$	$f(x) \times \frac{1}{f(x)} = 1$
VOORBEELD	VOORBEELD
$g(x) = 5x \quad \therefore \quad g^{-1}(x) = \frac{x}{5}$	$g(x) = 5x \quad \therefore \quad \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{5x}$

Voorbeeld 1: ‘n Voorbeeld van die inverse van $y = mx + c$.

Gegee $f(x) = 2x - 3$, teken $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

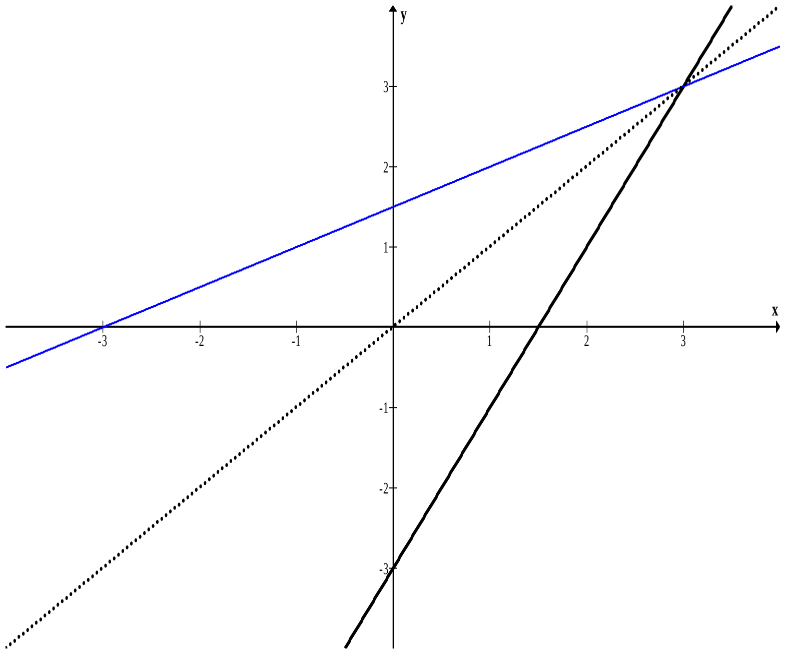
Gegee : $f(x) = 2x - 3 \quad \therefore \quad y = 2x - 3$

Stap 1: Ruil *x* en *y* om :

$$x = 2y - 3$$
$$x + 3 = 2y$$
$$\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = y$$
$$\therefore \quad y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Daarom, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$

Stap 2: Skets die grafieke op dieselfde assestelsel



Die grafiek van $f^{-1}(x)$ is die refleksie van $f(x)$ in die lyn $y = x$.

Let op dat in die geval van die parabool (kwadratiese funksie) is die inverse nie ‘n funksie nie. Die rede hiervoor is dat die parabool nie ‘n een-een-duidige relasie (afbeelding) verteenwoordig nie. Indien ons vereis dat die inverse van die parabool ook ‘n funksie moet wees, dan moet ons die definisie versameling van die oorspronklike funksie beperk (LW **nie** die inverse nie) Hieronder is ‘n voorbeeld ter illustrasie:

Voorbeeld 2: ‘n Voorbeeld van die inverse van $y = ax^2$.

Gegee $f(x) = 3x^2$, teken $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

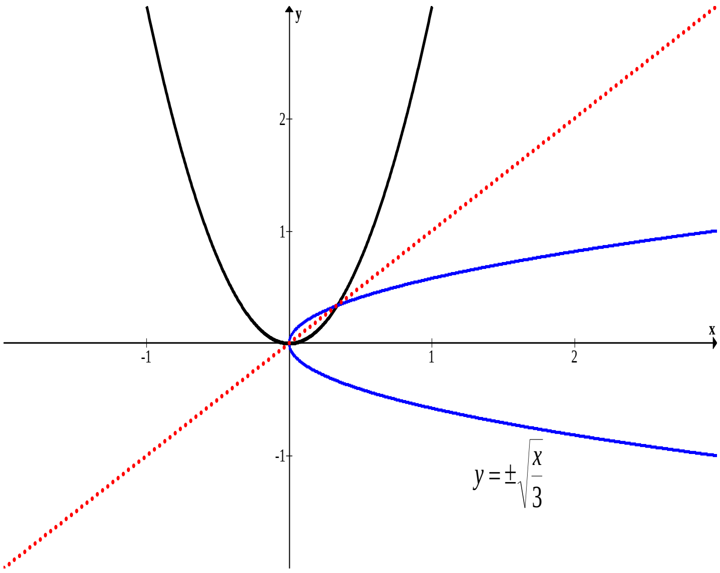
Gegee : $f(x) = 3x^2 \quad \therefore \quad y = 3x^2$

Stap 1: Ruil x en y om: $x = 3y^2$

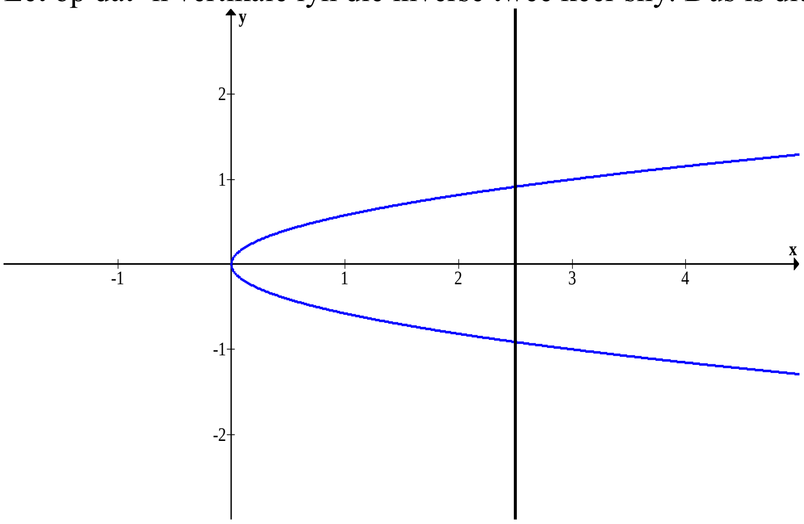
$$\frac{x}{3} = y^2$$

$$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{x}{3}} \quad \text{waar} \quad x > 0$$

Stap 2: Skets die grafieke op dieselde assestelsel



Let op dat ‘n vertikale lyn die inverse twee keer sny. Dus is dit nie ‘n funksie.



Om die inverse van die funksie $y = ax^2$ te bepaal:

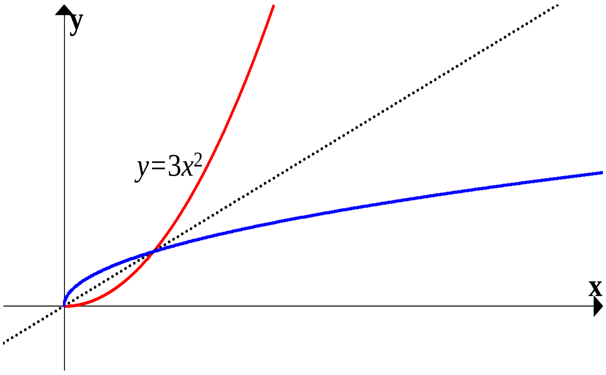
1) Ruil x en y om in die vergelyking; $x = ay^2$

2) Maak dan y die onderwerp van die vergelyking;: $\frac{x}{a} = y^2$

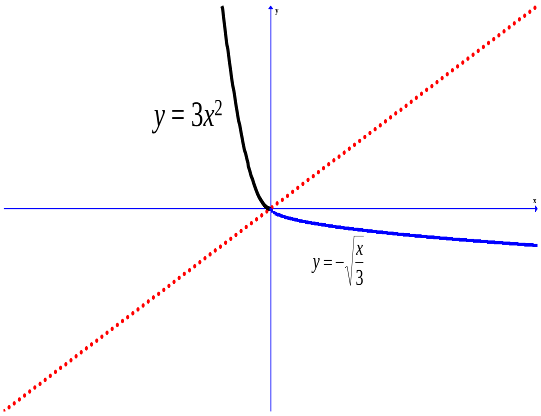
$y = \pm\sqrt{\frac{x}{a}}$ waar $x \geq 0$

Die vertikale lyn toets toon dat die inverse van die parabool nie'n funksie is nie. Ons kan egter die definisie versameling van die parabool beperk ten einde te verseker dat die inverse ook 'n funksie sal wees. Daar is twee maniere waarop dit gedoen kan word, soos getoon in die twee sketse hieronder.

In die figuur hieronder word die definisieversameling soos volg beperk : $x \geq 0$, dan is $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ 'n funksie.



In die figuur hieronder word die definisieversameling soos volg beperk, $x \leq 0$ dan is $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{3}}$ 'n funksie.



Oefening:

Die funksie begrip

1. Noem of die volgende bewerings waar of vals is. Gee in elke geval 'n rede vir jou antwoord.

   1.1 Die inverse van $f = \{(2;3);(4;7)\}$ is $\{(3;2);(7;4)\}$ (2)

   1.2 $f = \{(2;-3);(4;6);(-2;-3);(6;4)\}$ is 'n meer tot eenduidige funksie. (2)

   1.3 Die inverse van 1.2 is 'n funksie (2)

   1.4 Die definisieversameling van 1.2 is D = {2; 4; 6} (2)

   1.5 Die funksie f en sy inverse f^{-1} is refleksies in die lyn $y = -x$ (2)

Die inverse van $y = mx + c$

2. Gegee $f(x) = 2x - 7$
   - 2.1 Is $f(x)$ ‘n funksie? Verduidelik jou antwoord. (2)
   - 2.2 Skryf die definisieversameling en waardeversameling van $f(x)$ neer. (2)
   - 2.3 Bepaal $f^{-1}(x)$ (2)
   - 2.4 Teken grafieke van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ op een assestelsel. (4)
   - 2.5 Gee die vergelyking van die refleksielyn tussen die twee grafieke en dui dit met ‘n stippellyn aan op die skets. (2)

3. Gegee dat $f^{-1}(x) = -2x + 4$, bepaal $f(x)$. (2)

4. $f(x) = \frac{2}{3}x$ en $g(x) = -3x - 9$. Bepaal die punt(e) waar f^{-1} en g^{-1} mekaar sal sny. (7)

Die inverse van $y = ax^2$

5. Gegee die funksie $f(x) = x^2$
   - 5.1 Bepaal $f^{-1}(x)$. (3)
   - 5.2 Skets die grafiek van $f^{-1}(x)$. (2)
   - 5.3 Verduidelik waarom $f^{-1}(x)$ nie ‘n funksie is nie. (1)
   - 5.4 Verduidelik hoe jy die definisieversameling van $f(x)$ sal beperk sodat $f^{-1}(x)$ ook ‘n funksie sal wees. (2)

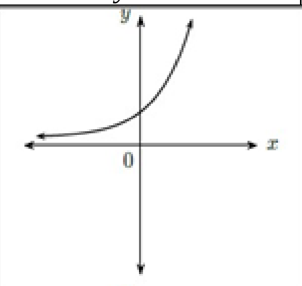
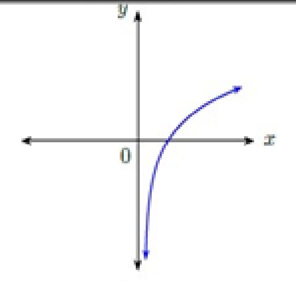
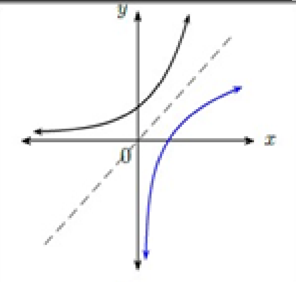
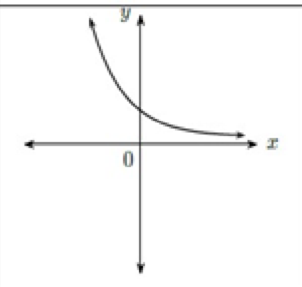
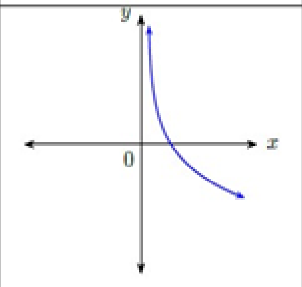
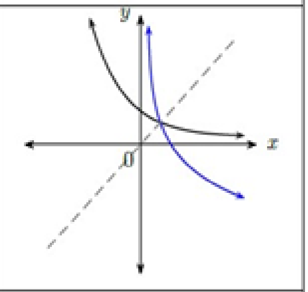
6. Gegee $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
   - 6.1 Bepaal die inverse van $f(x)$ (3)
   - 6.2 Is die inverse van $f(x)$ ’n funksie of nie? Gee ‘n rede vir jou antwoord. (2)
   - 6.3 Hoe sal jy die definisieversameling van die oorspronklike funksie beperk om te verseker dat $f^{-1}(x)$ ook ‘n funksie sal wees. (1)
   - 6.4 Skets $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel. (3)
   - 6.5 Bepaal die punt(e) waar $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ mekaar sal sny. (4)

7. Gegee $f(x) = -2x^2$
   - 7.1 Verduidelik waarom, indien die definisieversameling van hierdie funksie nie beperk word nie, sy inverse nie ‘n funksie sal wees nie? (2)
   - 7.2 Skryf die vergelyking van die inverse, $f^{-1}(x)$ van $f(x) = -2x^2$ vir $x \in (-\infty\,;\,0]$ in die vorm $f^{-1}(x) = \ldots\ldots..$ (3)
   - 7.3 Skryf die definisieversameling van $f^{-1}(x)$ neer. (2)
   - 7.4 Skets grafieke van beide $f(x) = -2x^2$ vir $x \in (-\infty\,;\,0]$ en $f^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel. (4)

Sessie 2

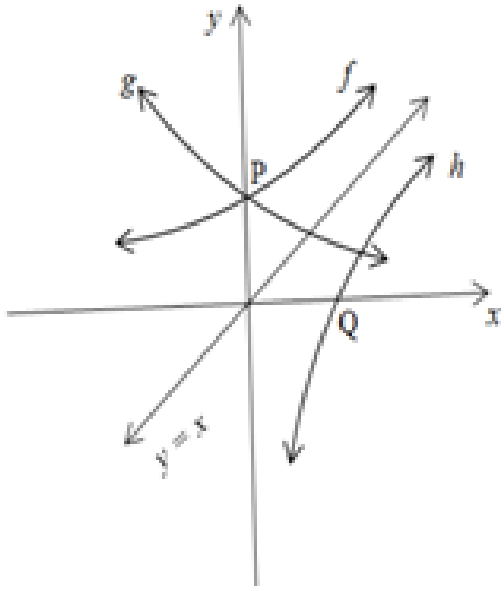
Die Log-funksie en sy inverse:

Opsomming van die grafieke: $y = b^x$ **en** $y = \log_b x$

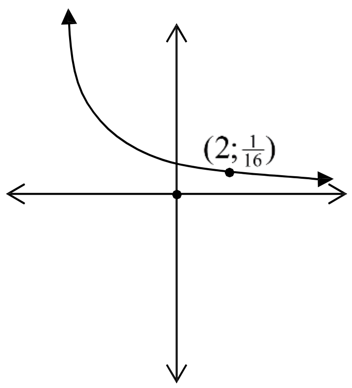
	Eksponensiale funksie $y = b^x$	Logaritmiese funksie $y = \log_b x$	Eksponensiale & Logaritmiese funksies
$b > 1$			
$0 < b < 1$			

Log and Eksponensiale funksies as inverses van mekaar

1. Die grafiek hiernaas toon die funksies g, f en h.
   f en g is simmetries met betrekking tot die y-as.
   f en h is simmetries met betrekking tot die lyn $y = x$. Indien $f(x) = a^x$ en die punt (1; 4) op $f(x)$ lê:
   1.1. Bepaal die waarde van a. (2)
   1.2. Skryf die koördinate van P en Q neer. (2)
   1.3. Skryf die vergelyking van g, h. en g^{-1} neer. (6)



2. Die figuur verteenwoordig die grafiek van $f(x)=a^x$.



2.1 Bereken die waarde van a. (2)

2.2 Skets ‘n grafiek van $k(x)$ indien k die inverse van f is. Toon die afsnitte met die asse, die koördinate van een ander punt en die asymptote aan. (4)

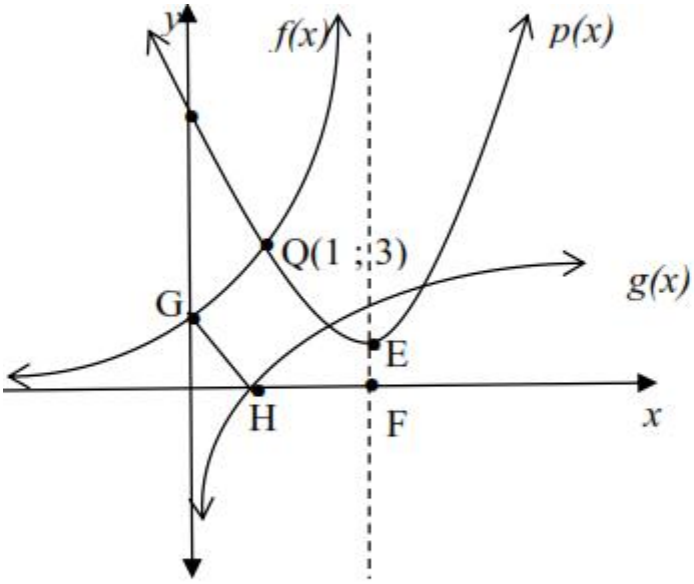
3. Die diagram hiernaas toon die funksies:

$f(x)=k^x$;

$p(x)=ax^2+bx+c$ en

$g(x)=\log_m x$

Die minimum waarde van die funksie $p(x)$ is gelyk aan 1 waar $x=3$.
Die draaipunt van die parabool is by die punt E.
EF is ewewydig aan die y-as.
f is ’n inverse van g.



3.1 Bepaal die waardes van $a, b, c,$ k en m. (5)

3.2 Bereken die lengte van EF en GH korrek tot twee desimale plekke. (3)

3.3 Bepaal die vergelykings van $f^{-1}(x)$ en $g^{-1}(x)$. (4)

3.4 Verduidelik vervolgens waarom of waarom nie, sal $f(x)$ en $g(x)$ simmetries wees met betrekking tot die lyn $y=x$. (1)

Sessie 3: TRIGONOMETRIE(± 40/150 Punte)

Saamgestelde en Dubbel Hoeke

Ten einde hierdie gedeelte te bemeester is dit die beste om die formules hieronder leer. Hierdie formules sal ook gegee word op die formuleblad in die eksamen vraestel

- Saamgestelde hoek identiteite:

  (a) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

  $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

  (b) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$

  $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

- Dubbelhoek Identiteite

  (c) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

  (d) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

  $= 1 - 2\sin^2 A$

  $= 2\cos^2 A - 1$

Verwys as dubbel hoek formule

Wanneer twee hoeke bygevoeg of afgetrek word om 'n nuwe hoek te vorm, word 'n saamgestelde of 'n dubbelhoek

Aan die einde van die afdeling moet jy die volgende kan doen vir eksamendoeleindes:

A. Aanvaar die saamgestelde hoek formule $\boxed{\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B}$ en gebruik dit om die fomules hier onder af te lei:

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$$
$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$
$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$
$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

Onthou!

Ko-funksies

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

Negatiewe Hoeke

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = +\cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

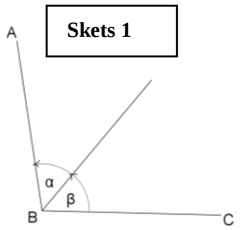
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

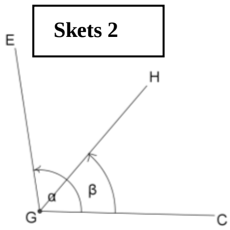
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

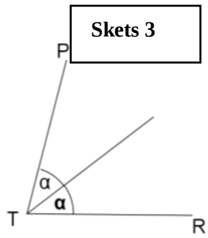
B. Gebruik die saamgestelde en dubbel hoek formule om:

a. Evalueer 'n uitdrukking sonder om 'n sakrekenaar te gebruik
b. Vereenvoudiging van trigonometriese uitdrukkings
c. Bewys van Identiteite
d. Oplos van trigonometriese vergelykings (beide spesifieke en algemene oplossings)

Die sketse hieronder gee 'n visuele aanduiding van saamgestelde en dubbel hoeke.







Skets 1: Die saamgestelde hoek $A\hat{B}C$ is gelyk aan die som van α en β. bv. $75° = 45° + 30°$

Skets 2: Die saamgestelde hoek $E\hat{G}H$ is gelyk aan die verskil van α en β. bv. $15° = 60° - 45°$ of $15° = 45° - 30°$

Skets 3: Die dubbelhoek $P\hat{T}R$ is gelyk aan die som van α en α. eg. $45° = 22.5° + 22.5°$

Gegee enige spesiale hoeke α en β, dan kan ons die waardes van die sinus en cosinus verhoudings van die hoeke $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ en 2α bepaal.

LW: $0°$; $30°$; $45°$; $60°$ en $90°$ is spesiale hoeke, ons kan die trig funksie van enige van hierdie hoeke sonder ‘n sakrekenaar bepaal.

Oefeninge: Dit moet gedoen word sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.

A. Lei al die saamgestelde en dubbelhoekidentiteite af, wat op die vorige bladsy gegee is.

B. 1.

1.1 Evalueer elk van die volgende sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.

a) $\sin 75°$ b) $\cos 15°$ c) $\cos 105°$ d) $\sin 165°$

e) $\sin 36°.\cos 54° + \cos 36° \sin 54°$ f) $\cos 42°.\cos 18° - \sin 42° \sin 18°$

g) $\sin 85°.\sin 25° + \cos 85° \cos 25°$ h) $\sin 70°.\cos 40° - \cos 70° \sin 40°$

i) $2\sin 30°.\cos 30°$ j) $\dfrac{2\sin 40°.\cos 40°}{\cos 10°}$

1.2 Indien $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\tan\beta = \sqrt{2}$, en α en β is skerphoeke bepaal die waarde van $\sin(\alpha + \beta)$.

1.3 Indien $\tan A = \dfrac{2}{3}$ en $90° < A < 360°$, bepaal die waarde van $\cos 2A$, sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.

2. Vereenvoudig die volgende tot 'n enkel trigonometriese verhouding:

$$\frac{4\cos(-x).\cos(90° + x)}{\sin(30° - x).\cos x + \cos(30° - x).\sin x}$$

3. Bewys dat

a) $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$

b) $\cos(90° - 2x).\tan(180° + x) + \sin^2(360° - x) = 3\sin^2 x$

c) $(\tan x - 1)(\sin 2x - 2\cos^2 x) = 2(1 - 2\sin x \cos x)$

4. Bepaal die algemene oplossing van x in die volgende:

a) $\sin 2x.\cos 10° - \cos 2x.\sin 10° = \cos 3x$

b) $\cos^2 x = 3\sin 2x$

c) $2\sin x = \sin(x + 30°)$

ADDISIONELE VRAE

1. Gegee $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; waar $90^0 \le \alpha \le 270°$

Bereken met behulp van 'n skets en sonder die gebruik van 'n sakrekenaar die waarde van: a) $\tan\alpha$ b) $\sin(90° + \alpha)$ c) $\cos 2\alpha$ (3+2+3)

2. a)

Gebruik die uitbreidings vir sin(A + B) en cos(A + B) om die volgende identiteit te bewys: (3)

$$\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$$

b) Indien $\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$, bewys in enige ΔABC dat (4)

$\tan A.\tan B.\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

3. Indien $\sin 36°\cos 12° = p$ en $\cos 36°\sin 12° = q$, bepaal in terme van p en q die waarde van :

a) $\sin 48°$ (3)

b) $\sin 24°$ (3)

c) $\cos 24°$ (3)

4. Toon dat $\sin^2 20° + \sin^2 40° + \sin^2 80° = \frac{3}{2}$

(**WENK:** $40° = 60° - 20°$ **en** $80° = 60° + 20°$ (7)

5. Gegee: $f(x) = 1 + \sin x$ en $g(x) = \cos 2x$

Bereken die snypunte van die grafieke van f en g vir $x \in [180° ; 360°]$ (7)

6. As $\sin\theta = \frac{1}{3}$, gegee is, bereken die numeriese waarde van $\sin 3\theta$, **SONDER** die gebruik van 'n sakrekenaar. (5)

7. Bewys dat vir enige hoek A:

$$\frac{4\sin A\cos A\cos 2A\sin 15°}{\sin 2A(\tan 225° - 2\sin^2 A)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$ (6)

8. Los op vir x as $2\cos x = \tan 2x$ en $x \in [-90° \; ; \; 90°]$. Toon ALLE bewerkings. (8)

9. Indien $\cos\beta = \frac{p}{\sqrt{5}}$; met $p < 0$ en $\beta \in [0^0;\ 90^0]$, bepaal, deur van 'n diagram gebruik te maak, 'n uitdrukking in terme van p vir:
   a) $\tan\beta$ (4)
   b) $\cos 2\beta$ (3)

10.1 As sin 28° = a en cos 32°= b , bepaal die volgende in terme van a en/of b
   a) $\cos 28°$
   b) $\cos 64°$
   c) $\sin 4°$ (2+3+4)

10.2 Bewys, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, dat as sin 28° = a en cos 32° = b, dan is $b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2} = \frac{1}{2}$. (4)

Sessie 4: Graad 12 Differensiaal rekene

Derdegraadse Grafieke: In hierdie les sal jy deur 3 verskillende tipes vrae werk.

1. **Om derdegraadse grafieke te trek**
2. **Die beantwording van afgeleide vrae as die grafiek gegee is.**
3. **Die beantwording van afgeleide vrae as die grafiek van die afgeleide gegee is**

1.1

Gegewe: $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

1.1.1 Toon dat $(x-1)$ 'n faktor is van $f(x)$. (2)

1.1.2 Faktoriseer vervolgens $f(x)$ volledig. (2)

1.1.3 Bepaal die koördinate van die draaipunte van f. (4)

1.1.4 Teken 'n sketsgrafiek van f en toon die draaipunte sowel as die x-afsnitte duidelik aan. (4)

1.1.5 Vir watter waardes van x sal f 'n infleksiepunt(buigpunt) hê? (4)

[16]

1.2

Gegewe $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

1.2.1 Toon dat $(x-1)$ 'n faktor is van $f(x)$. (2)

1.2.2 Faktoriseer $f(x)$ volledig. (3)

1.2.3 Bepaal die x-en y-afsnitte van $f(x)$. (2)

1.2.4 Bepaal die koördinate van die draaipunte van $f(x)$. (4)

1.2.5 Bepaal die x-koördinaat van die infleksie punt van $f(x)$. (1)

1.2.6 Skets die grafiek van $f(x)$. (2)

1.2.7 Vir watter waardes van x is $f(x)$ stygend? (2)

1.2.8 Beskryf een transformasie van $f(x)$ wat indien toegepas, veroorsaak dat $f(x)$ twee positiewe ongelyke wortels sal hê (2)

1.2.9 Gee die vergelyking van g indien g die refleksie van f in die y-as is. (3)

1.2.10 Bepaal die gemiddelde veranderingstempo van f tussen die punte (0 ; 3) en (1 ; 0). (2)

1.2.11 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan f waar x = -2. (4)

1.2.12 Bewys dat die raaklyn in 1.2.11 die kromme van f in twee plekke sal sny. (4)

1.4

'n Derdegraadse funksie f het die volgende eienskappe:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(3) = f(-1) = 0$
- $f'(2) = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

f neem af vir $x \in \left[-\frac{1}{3}\,;\,2\right]$ alleenlik

Teken 'n moontlike sketsgrafiek van f, en toon die volgende duidelik aan : die grafiek: die x-koördinate van die draaipunte en al die x-afsnitte. (4)

1.3

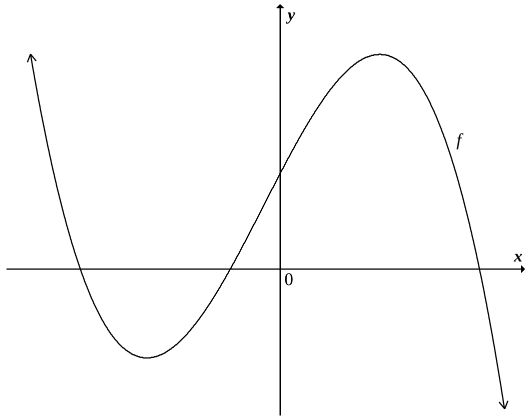
Die raaklyn aan die kromme van $g(x) = 2x^3 + px^2 + qx - 7$ by $x = 1$ is $y = 5x - 8$.

1.3.1 Toon aan dat (1 ; – 3) die raakpunt is. (1)

1.3.2 Bereken vervolgens die waardes van p en q. (6)

2.1

Die grafiek van die funksie $f(x) = -x^3 - x^2 + 16x + 16$ is hieronder geskets.

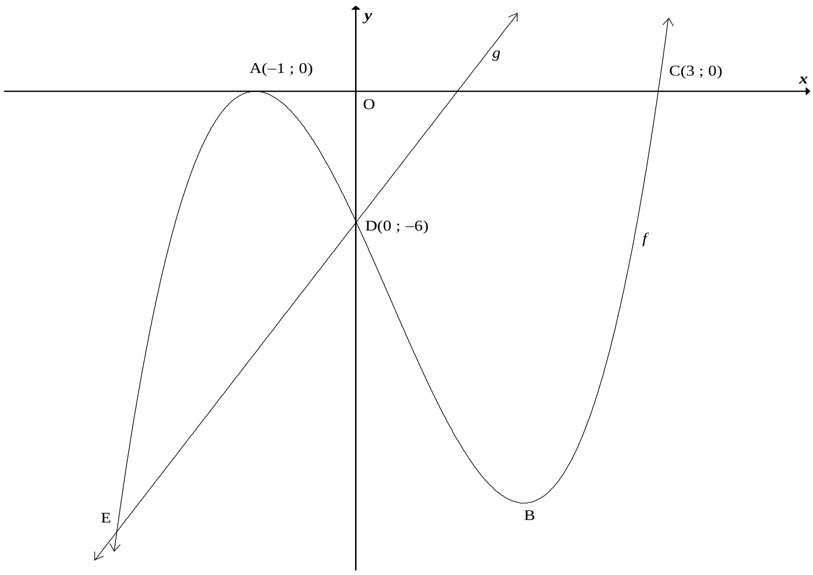


2.1.1 Bereken die x-koördinate van die draaipunte van f. (4)

2.1.2 Bereken die x-koördinaat van die punt waar $f'(x)$ 'n maksimum sal wees. (3)

2.2

Die grafieke van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en $g(x) = 6x - 6$ is hieronder geskets.
A(– 1 ; 0) en C(3 ; 0) is die *x*-afsnitte van *f*. Die grafiek van *f* het draaipunte by A en B.
D(0 ; – 6) is die *y*-afsnit van *f*. E en D is snypunte van die grafieke van *f* en *g*.



2.2.1 Toon aan dat $a = 2$; $b = -2$; $c = -10$ en $d = -6$. (5)

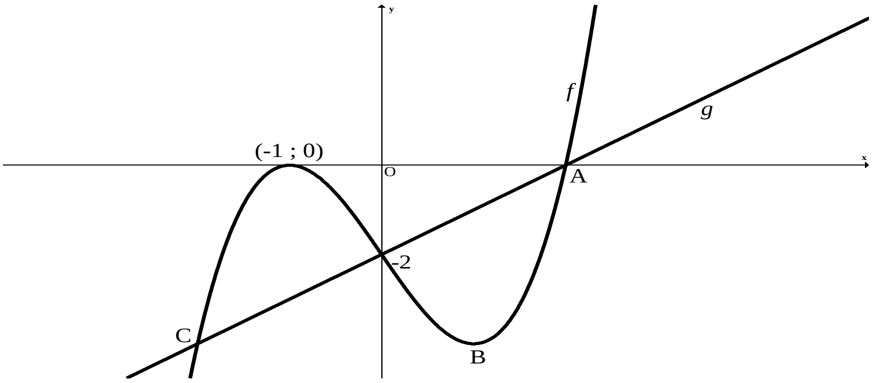
2.2.2 Bereken die koördinate van die draaipunt B. (5)

2.2.3 $h(x)$ is die vertikale afstand tussen $f(x)$ en $g(x)$, met ander woorde $h(x) = f(x) - g(x)$. (5)

Bereken x sodat $h(x)$ 'n maksimum is, waar $x < 0$. [15]

2.3

Die grafiek hieronder verteenwoordig die funksies *f* en *g* met $f(x) = ax^3 - cx - 2$ en $g(x) = x - 2$. A en (-1 ; 0) is die *x*-afsnitte van *f*. Die grafiek van *f* en *g* sny by A en C.



2.3.1 Bepaal die koördinate van A. (1)

2.3.2 Toon deur berekeninge aan dat $a = 1$ en $c = -1$. (4)

2.3.3 Bepaal die koördinate van B, die draaipunt van *f*. (3)

2.3.4 Toon aan dat die lyn BC ewewydig aan die *x*-as is. (7)

2.3.5 Bepaal die *x*-koördinate van die infleksiepunt van *f*. (2)

2.3.6 Skryf die waardes van *k* neer waarvoor $f(x) = k$ slegs EEN wortel sal hê. (3)

2.3.7 Skryf die waardes van *x* neer waarvoor $f'(x) < 0$. (2)

2.4 Beskou die grafiek van $g(x) = -2x^2 - 9x + 5$.

2.5.1 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van g by $x = -1$. (4)

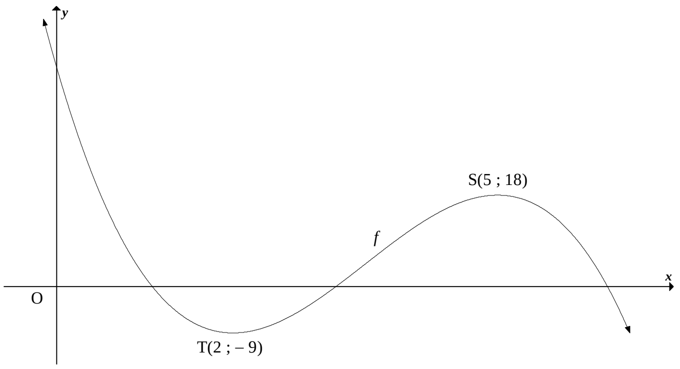
2.5.2 Vir watter waardes van q sal die lyn $y = -5x + q$ nie die parabool sny nie? (3)

2.5 Gegee: $h(x) = 4x^3 + 5x$

Verduidelik of dit moontlik is om 'n raaklyn met 'n negatiewe gradiënt aan die grafiek van h te teken. Toon AL jou berekeninge. (3)

2.6

Die funksie $f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + c$ is hieronder geskets. Die draaipunte van die grafiek van f is T(2 ; – 9) en S(5 ; 18).



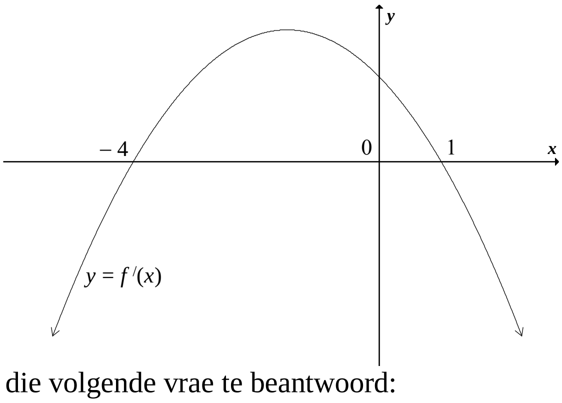
2.6.1 Toon aan dat $a = 21$, $b = -60$ en $c = 43$. (7)

2.6.2 Bepaal 'n vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van f by $x = 1$. (5)

2.6.3 Bepaal die x-waarde waarby die grafiek van f 'n buigpunt het. (2)

3.1

Die grafiek van $y = f'(x)$, waar f 'n derdegraadse funksie is, is hieronder geskets.



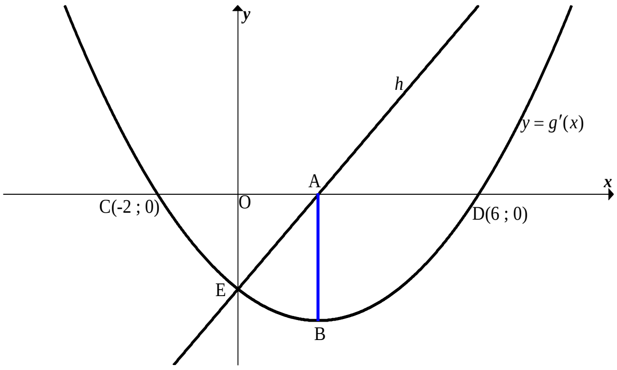
Gebruik die grafiek om die volgende vrae te beantwoord:

3.1.1 Vir watter waardes van x is die grafiek van $y = f'(x)$ dalend? (1)

3.1.2 By watter waarde van x sal die grafiek van f 'n lokale minimum hê? Gee redes vir jou antwoord. (3)

3.2

Die grafieke van $y = g'(x) = ax^2 + bx + c$ en $h(x) = 2x - 4$ is hieronder geskets. Die grafiek van $y = g'(x) = ax^2 + bx + c$ is die grafiek van die afgeleide van 'n derdegraadse funksie g. Die grafieke van h en g' het 'n gemeenskaplike *y*-afsnit by E. C(-2 ; 0) en D(6 ; 0) is die *x*-afsnitte van die grafiek van g'. A is die *x*-afsnit van *h* en B is die draaipunt van g'. AB $\parallel$ *y*-as.



3.2.1 Skryf die koördinate van E neer. (1)

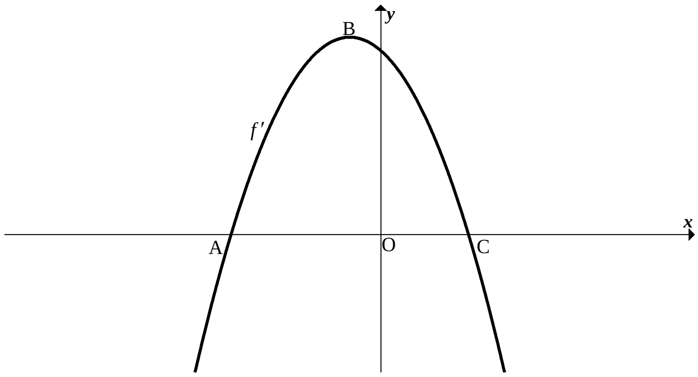
3.2.2 Bepaal die vergelyking van die grafiek van g' in die vorm $y = ax^2 + bx + c$. (4)

3.2.3 Skryf die *x*-koördinate van die draaipunt van g neer. (2)

3.2.4 Skryf die *x*-koördinate van die infleksiepunt van die grafiek van *g* neer. (2)

3.2.5 Verduidelik hoekom *g* 'n lokale maximum by $x = -2$ het. (3)

3.3 Hieronder is die grafiek van f', die afgeleide van $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$ geteken. A, B en C is die afsnitte van f' met die asse.



3.3.1 Bereken die koördinate van A. (2)

3.2.2 Bepaal die koördinate van B en C. (3)

3.3.3 Watter punte op die grafiek van *f*(*x*) sal presies dieselfde *x*-waardes as B en C hê? (1)

3.3.4 Vir watter waardes van *x* sal *f*(*x*) toeneem? (2)

3.3.5 Bepaal die *y*-koördinaat van die punt van infleksie van *f*. (4)

Sessie 5: Graad 11 Meetkunde

Hieronder volg Graad 11 Stellings, Omgekeerde Stellings en Gevolgtrekkings wat jy moet ken. Die bewyse van die stellings gemerk met (**) moet jy studeer, want dit kan geassesseer word..

1	**Stelling****	Die loodlyn uit die middelpunt van 'n sirkel na 'n koord halveer die koord. **(loodlyn uit midpt. Θ na koord)**
	Omgekeerde	Die lynstuk wat die middelpunt van 'n sirkel met die middelpunt van 'n koord verbind, is loodreg op die koord. **(midpt Θ; Midpt. koord)**
		Die middelloodlyn van 'n koord gaan deur die middelpunt van die sirkel. **(middelloodlyn van koord)**
2	**Stelling ****	Die hoek wat 'n koord by die middelpunt van 'n sirkel onderspan, is dubbel die hoek wat dit by enige punt op die omtrek onderspan. **(Midpts ∠ = 2 ×Omtreks∠)**
	Gevolgtrekkings	1. Die Omtrekshoek wat deur die middellyn onderspan word, is 'n regte hoek, 90^0 . **(∠ in half sirkel of ∠ in ½ Θ)** 2. Hoeke in dieselfde sirkelsegment is gelyk **(∠^{e} in dies. Θ segm)** 3. Gelyke koorde onderspan gelyke omtrekshoeke **(gelyke koorde; gelyke ∠^{e})** 4. Gelyke koorde onderspan gelyke middelpuntshoeke **(gelyke koorde; gelyke ∠^{e})** 5. Gelyke koorde in gelyke sirkels onderspan gelyke omtrekshoeke/middelpuntshoeke **(gelyke sirkels; gelyke koorde; gelyke ∠^{e})**
	Gevolgtrekkings Omgekeerde	1. As 'n koord van 'n sirkel 'n regte hoek by die omtrek onderspan, dan is die koord 'n middellyn. **(koord onderspan 90°)** 2. As 'n lynstuk wat twee punte verbind, gelyke hoeke by twee ander punte aan dieselfde kant van die lynstuk onderspan, dan is die vier punte konsiklies. (d.w.s. hulle lê op die omtrek van 'n sirkel). **(lynstuk onderspan gelyke ∠^{e})**
3	**Stelling ****	Die teenoorstande hoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr. **(teenoorst. ∠^{e} van kvh)**
	Omgekeerde	As die teenoorstaande hoeke van 'n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek. **(teenoorst. ∠^{e} van vierhoek is suppl.)**
	Gevolgtrekking	Die buitehoek van 'n koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek. **(buite ∠ van kvh)**
	Gevolgtrekking Omgekeerde	As die buitehoek van 'n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek. **(buite ∠ van vierhoek =teenoorst binne∠)**
4	**Stelling**	'n Raaklyn aan 'n sirkel is loodreg op die radius by die raakpunt. **(raaklyn ⊥ radius)**
	Omgekeerde	'n Lyn deur enige punt op 'n sirkel loodreg op die radius, is 'n raaklyn. **(lyn ⊥ radius)**
5	**Stelling**	As twee raaklyne vanuit 'n punt aan 'n sirkel getrek word, dan is die afstande van af die punt na die raakpunte gelyk. **(Raaklyne vanuit dies. punt)**
6	**Stelling ****	Die hoek wat gevorm word tussen'n raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord wat vanuit die raakpunt getrek word, is gelyk aan die hoek in die oorstaande segment. **(∠ tussen raaklyn en koord)**
	Omgekeerde	As 'n lyn deur die eindpunt van 'n koord, 'n hoek met die koord vorm wat gelyk is aan die hoek in die oorstaande segment, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel. **(∠ tussen lyn en koord = ∠ in teenoorst. Θ segm)**

Die teorie van vierhoeke wat in graad 10 gedoen was, moet hersien word, dit kan binne die graad 11 meetkunde geintegreer word.

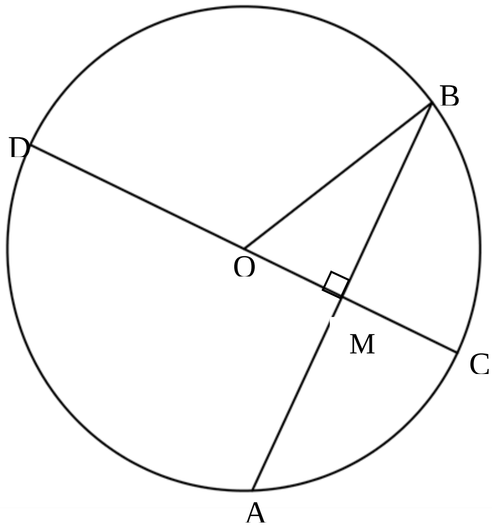
Vraag 1

In die diagram hieronder, O is die middelpunt van die sirkel. Koord AB is loodreg op die middellyn DC. CM : MD = 4 : 9 en AB = 24 eenhede.

1.1 Bepaal 'n uitdrukking vir DC in terme van x indien CM = $4x$ eenhede.

1.2 Bepaal 'n uitdrukking vir OM in terme van x.

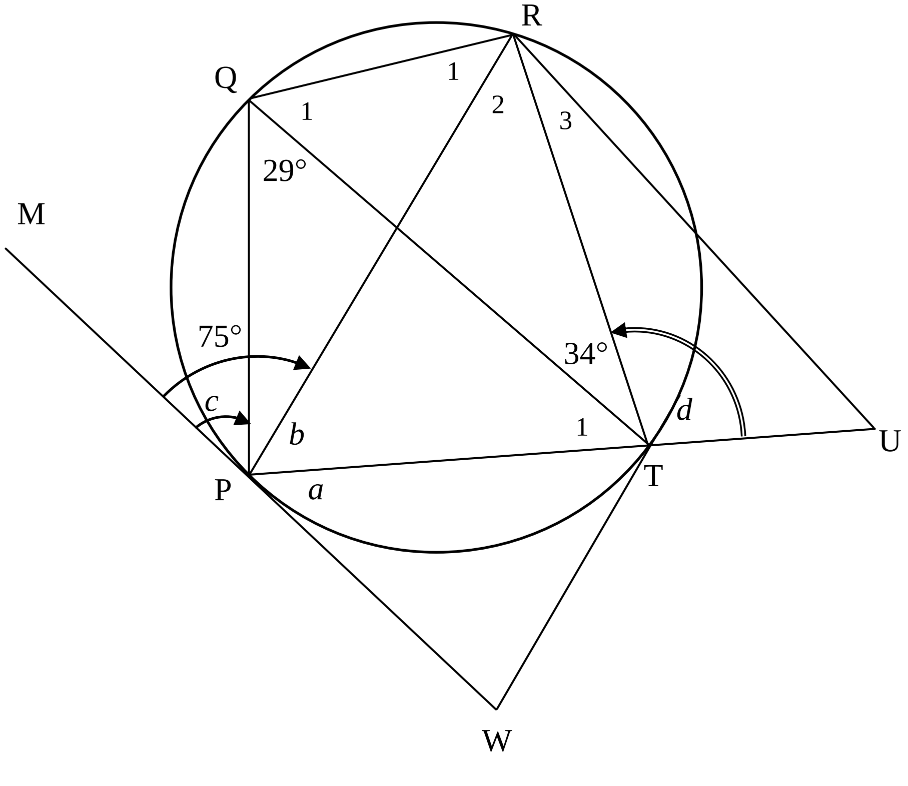
1.3 Vervolgens, of andersins, bereken die lengte van die radius.



Vraag 2

In die diagram is P, Q, R en T punte op die omtrek van 'n sirkel. MW en TW is raaklyne aan die sirkel by P en T onderskeidelik. PT is verleng en sny RU by U. $M\hat{P}R = 75°$, $P\hat{Q}T = 29°$ en $Q\hat{T}R = 34°$.

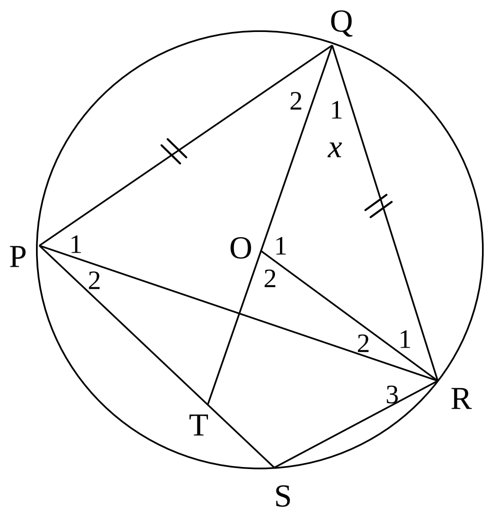
Stel $T\hat{P}W = a$, $R\hat{P}T = b$, $M\hat{P}Q = c$ en $R\hat{T}U = d$. Bereken die waardes van a, b, c en d.



Vraag 3

In die diagram hieronder, is O die middelpunt van die sirkel. P, Q, R en S is punte op die omtrek van die sirkel. TOQ is 'n reguitlyn sodanig dat T op PS val.

PQ = QR en $\hat{Q}_1 = x$.



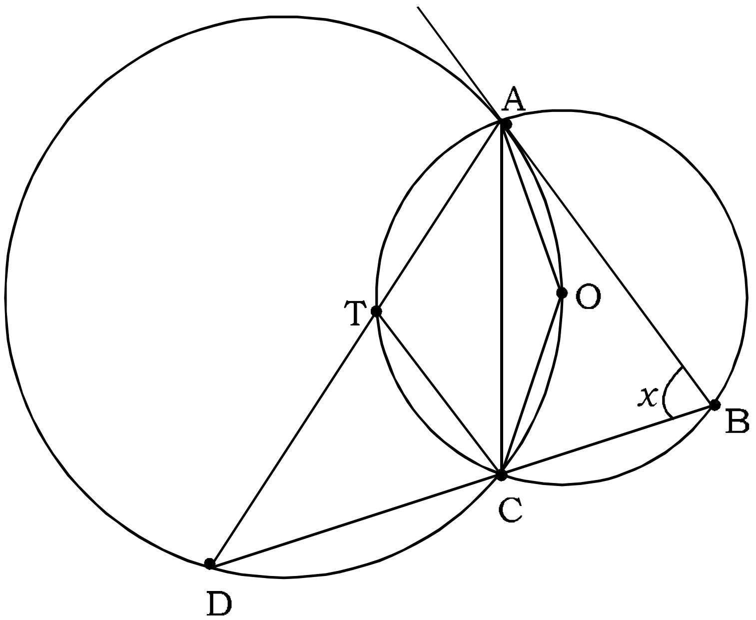
3.1 Bereken, met redes, $\hat{P}_1$ in terme van x. (3)

3.2 Toon aan dat TQ vir $P\hat{Q}R$ halveer. (3)

3.3 Toon aan dat STOR 'n koordevierhoek is. (3)

Vraag 4

In die diagram sny twee sirkels in A en C. BA is 'n raaklyn aan die groter sirkel by punt A. Die reguitlyne ATD en BCD sny die sirkels in T en D, asook C en D respektiewelik. Die groter sirkel gaan deur die middelpunt O van die kleiner sirkel. Laat $\hat{B} = x$.



4.1 Bewys dat $\hat{D} = 180° - 2x$. (4)

4.2 Bewys dat AD = BD. (5)

4.3 Bewys dat TC || AB. (2)

Vraag 5

ABCD is ‘n koordevierhoek. AC//BP, PA en PB is raaklyne. Indien $B\hat{A}P = x$,

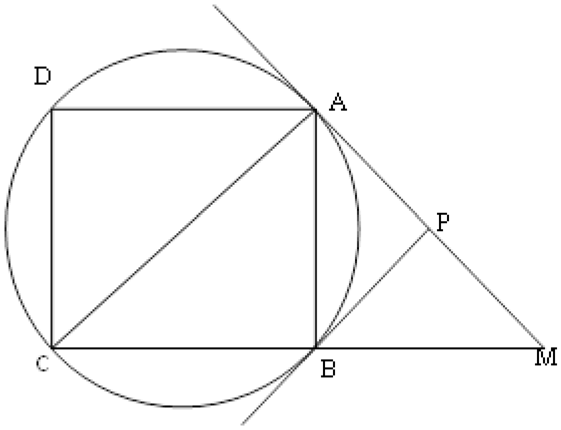
5.1 Noem drie hoeke gelyk aan *x*.

5.2 Bewys dat ΔABC ‘n gelykbenige driehoek is

5.3 Gee $\hat{M}$ in terme van *x*.

5.4 As ABCD ‘n vierkant is, bewys dat:

$\Delta APB \equiv \Delta BPM$



Sessie 6

Graad 12 Meetkunde

Hieronder is die **Graad 12 Stellings**, **Omgekeerde** Stellings en Gevolgtrekkings wat jy moet ken. Die bewyse van die stellings wat met (**) gemerk is, moet jy studeer want dit kan geassesseer word.

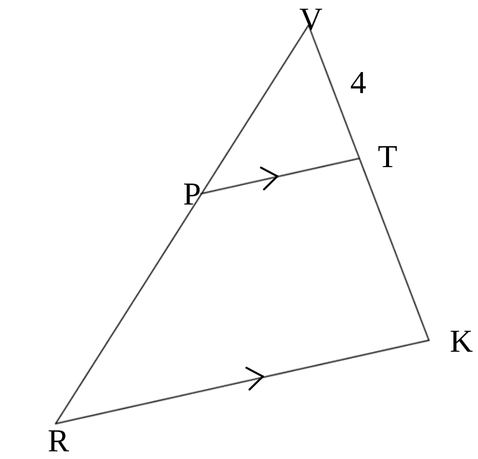
1	**Stelling****	Die lyn ewewydig aan een sy van 'n driehoek verdeel die ander twee sye in eweredige dele. **(lyn || een sy van Δ)**
	Omgekeerde	As 'n lyn twee sye van 'n driehoek in eweredige dele verdeel, is die lyn ewewydig aan derde sy. **(lyn verdeel twee sye van Δ ewer.)**
2	**Stelling ****	As twee driehoeke gelykhoekig is, is hulle ooreenstemmende sye eweredig (en is driehoeke dus gelykvormig) **(||| Δ^e)**
	Omgekeerde	As die ooreenstemmende sye van twee driehoeke eweredig is, is die driehoeke gelykhoekig (en is driehoeke dus gelykvormig). **(Sye van Δ^e eweredig)**

Vraag 1

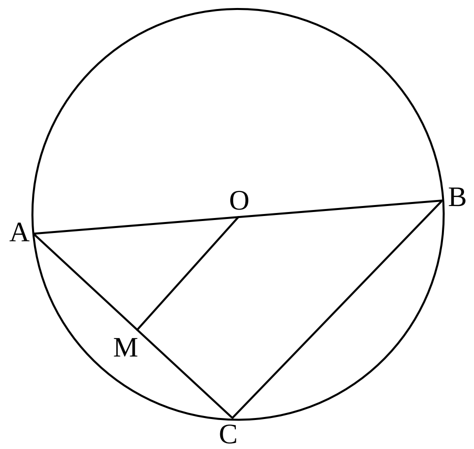
1.1

In die diagram hieronder, het ΔVRK vir P op VR en T op VK sodat PT $\parallel$ RK. VT = 4 eenhede, PR = 9 eenhede, TK = 6 eenhede and VP = $2x - 10$ eenhede.

Bereken die waarde van x.



1.2 In die diagram hieronder is O die middelpunt van die sirkel. OM $\perp$ AC. Die radius van die sirkel is gelyk aan 5 cm en BC = 8 cm.



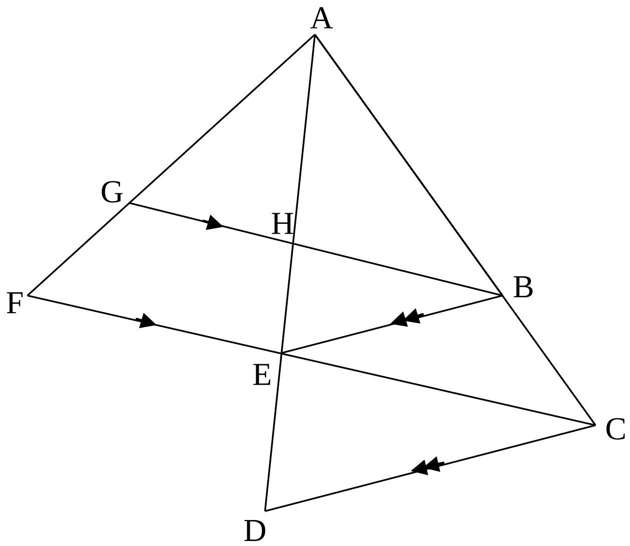
1.2.1 Skryf neer die grootte van $B\hat{C}A$. (1)

1.2.2 Bereken:

(a) Die lengte van AM, met redes (3)

(b) Area ΔAOM : Area ΔABC (3)

1.3 In die diagram hieronder is GB || FC en BE || CD. AC = 6 cm en $\frac{AB}{BC} = 2$.



1.3.1 Bereken met redes:

a) AH : ED (4)

b) $\frac{BE}{CD}$ (2)

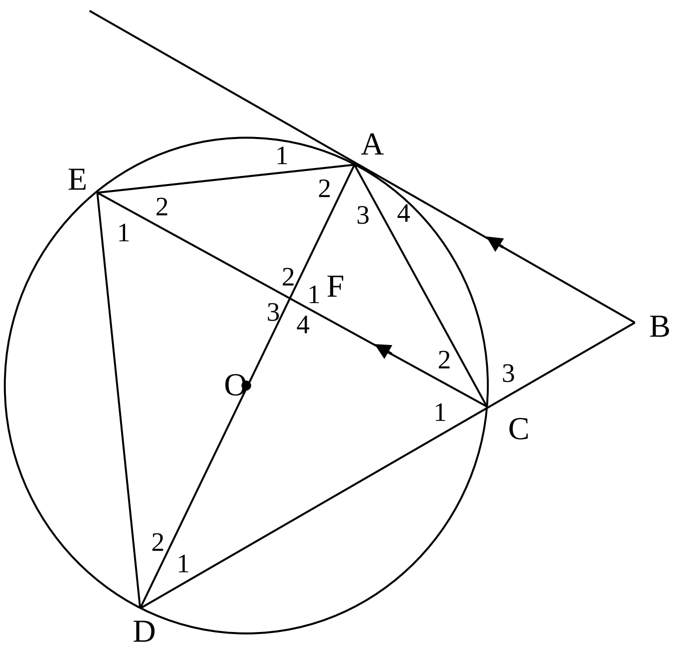
1.3.2 Indien HE = 2 cm, bereken die waarde van AD × HE. (2)

[8]

Vraag 2

2.1

In die diagram hieronder is AB ‘n raaklyn aan die sirkel met middelpunt O. AC = AO en BA || CE. DC verleng, sny raaklyn BA by B.



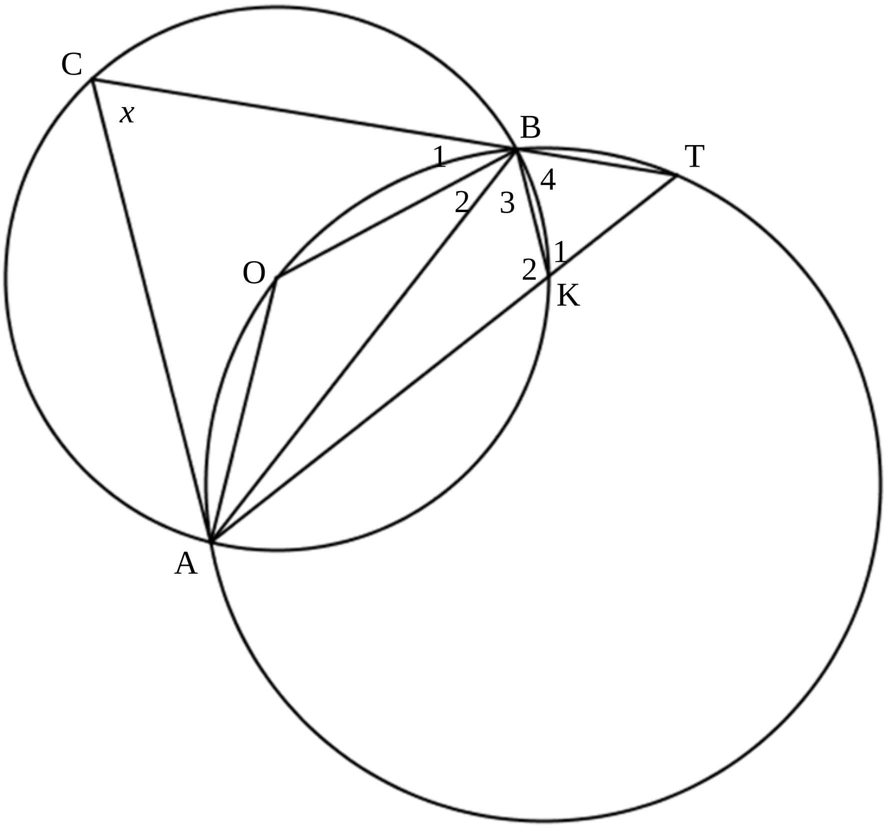
2.1.1 Toon aan dat $\hat{C}_2 = \hat{D}_1$. (3)

2.1.2 Bewys dat ΔACF ||| ΔADC. (3)

2.1.3 Bewys dat AD = 4AF. (4)

2.2

O is die middelpunt van die sirkel CAKB. AK verleng, sny sirkel AOBT by T. $A\hat{C}B = x$



2.2.1 Bewys dat $\hat{T} = 180° - 2x$. (3)

2.2.2 Bewys dat AC || KB. (5)

2.2.3 Bewys dat ΔBKT ||| ΔCAT (3)

2.2.4 As AK : KT = 5 : 2, bepaal die waarde van $\dfrac{AC}{KB}$ (3)

[14]